131 - Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

K un corps de caractéristique différente de 2. E un K-ev de dimension n.
Motivation : toute forme bilinéaire s'écrit comme somme d'une fb symétrique et d'une fb antisym

I) <u>Généralités</u>

1) <u>Premières définitions</u>

Déf : forme bilinéaire [Szp 42], fbs [Szp 43], forme quadratique. Isomorphisme entre fq et fbs.

Prop : formules de polarisation [Szp 70] *(les formules de polarisation sont différentes pour les formes sesquilinéaires et les formes hermitiennes)*

Prop : écriture en somme, matrice associée en DF. On a un isomorphisme entre les matrices symétriques Sn(K) et les formes quadratiques sur K^n. Ecriture de q(X)=tXAX [Szp 45].

Rq : une forme quadratique est exactement un polynôme homogène de degré 2, il en existe sur tout corps.

Cor : la K-dimension de l'espace vectoriel des fq sur K^n est n(n+1)/2.

Déf : le noyau d'une forme quadratique est l'ensemble {x dans K^n tq pour tout y, b(x,y)=0}.

Déf : q est dite non dégénérée si son noyau est trivial.

Déf : rang : c'est le rang de l'appl x->b(x,.). C'est aussi le rang de n'importe quelle matrice la représentant.

Prop : b non dégénérée ssi rg(b)=n.

2) <u>Orthogonalité</u> [Szp 54 à 58]

Déf : on dit que x et y sont orthogonaux si b(x,y)=0. Si A est une partie de E, on définit $A^\perp$ l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de A.

Prop : $A^\perp$ est un sev, propriétés d'inclusion etc

Prop : si b est non dégénérée, dim$A^\perp$+dimA=n *(quotients d'espaces vectoriels…)*

Ex : les matrices sym sont orthogonales aux matrices antisym pour la fbs (A,B)->tr(tAB).

3) <u>Isotropie</u> [Szp 60 à 62]

Déf : un vecteur isotrope est un vecteur x ts q(x)=0. L'ensemble de ces vecteurs s'appelle le cône, c'est un cône.

Prop : le noyau est inclus dans le cône d'isotropie, mais l'inverse n'est pas toujours vrai.

Déf : un espace H est dit isotrope s'il existe x dans H tq x soit dans l'orthogonal de H, et totalement isotrope si tous les vecteurs de H sont isotropes. L'indice de q est le maximum des dimensions des espaces totalement isotropes.

Prop : H tot isotrope ssi H inclus dans $H^\perp$.

Remarque : une fq peut être non dégénérée et avoir des espaces isotropes. Ex : [0,1 ;1,0].

Prop : H non isotrope. Alors H+$H^{\perp}$=E *(la restriction b' de b à HxH est non dégénérée donc x->b'(x,.) est un isomorphisme de H dans H*. b'(x,.) est une forme linéaire donc il existe un unique y_0 tq pour tout b'(x,y)=b(x,y_0)(=b(x,y)). Donc b(x,y-y_0)=0. Y-y_0 est ds $H^{\perp}$. Y=(y-y_0)+y_0 décomp unique OK)*

II) Réduction et classification des formes quadratiques

1) Décomposition en carrés [Szp 67 à 75]

Th : il existe une base orthogonale pour q [Szp 67] *(on suppose d'abord que q n'est pas dégénérée, on prend un vecteur v_1 tq q(v_1) non nuln Vect(v_1) est non isotrope donc E=Vect(v_1)+suppl, on conclut par récurrence. Dans le cas où q est dégénérée, on écrit E comme somme du noyau et d'un suppl, et on utilise le premier cas pour réduire sur le suppl, puis toutes base de Ker(q) est une base orthogonale du noyau, on recolle) ; Gram Schmidt ne marche pas dans le cas général !*

D'après le th précédent, toute forme quadratique admet une base orthogonale. Dans une telle base, q s'écrit q(x)=sum(a_i*x_i²), ce qui donne q=sum(a_i*(e_i*)²) : q s'écrit comme une somme de carrés de formes linéaires indépendantes, et sa matrice représentative est diagonale. Nous allons voir une méthode effective pour trouver une telle décomposition : la méthode de Gauss.

Th : méthode de Gauss pour écrire une fq comme somme de carrés de formes linéaires indépendantes.
q une fq sur E.
- Si dimE=1, $q(x) = a_{11}x_1^2$ donc $q = a_{11}(e_1^*)^2$.
- dimE=n.
  - 1er cas : il existe i tq $a_{ii} \neq 0$. Par exemple i=1

$$q(x) = a_{11}x_1^2 + x_1L(x_2, \dots, x_n) + q'(x_2, \dots, x_n) = a_{11}\left(x_1 + \frac{1}{2a_{11}}L(x_2, \dots, x_n)\right)^2 + q'(x_2, \dots, x_n) - \frac{1}{4a_{11}^2}L(x_2, \dots, x_n)^2$$

A gauche on a une forme linéaire au carré, et à droite une forme quadratique sur un espace de dim n-1, reste à vérifier qu'elles sont indépendantes *(écrire les matrices)*
  - 2e cas : pas de i tq $a_{ii} \neq 0$. Q non nulle donc par exemple $a_{12} \neq 0$.

$$q(x) = 2a_{12}x_1x_2 + x_1L_1(x_3, \dots, x_n) + x_2L_2(x_3, \dots, x_n) + q'(x_3, \dots, x_n)$$
$$= 2a_{12}\left(x_1 + \frac{1}{2a_{12}}L_1(x_3, \dots, x_n)\right)\left(x_2 + \frac{1}{2a_{12}}L_2(x_3, \dots, x_n)\right) + q'(x_2, \dots, x_n) - \frac{1}{4a_{12}^2}L_1(x_3, \dots, x_n)L_2(x_3, \dots, x_n)$$

On se sert de l'identité ab=1/4((a+b)²-(a-b)²) pour la partie de gauche et c'est bon.

Exemple : q(x,y,z)=(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2

Rq : cette décomposition n'est pas unique, suivant le choix des a_ii non nuls qu'on fait.

2) Classification des formes quadratiques [Szp 79]

Déf : deux fq q et q' sont dites équivalentes s'il existe u dans GL(E) tq q=q'ou. Ceci est équivalent à dire qu'il existe P dans GL(E) tq A_q=tPA_q'P (ie que A_q et A_q' sont congrues).

Rq : deux fq sont équivalentes si elles sont dans la même orbite pour l'action de GLn(R) sur Sn(R) par congruence.

a) Sur un corps algébriquement clos [Szp 80]

Th : il y a n+1 classes d'équivalence décrites par les matrices Ir.

Cor : il existe une base o.n pour q ssi elle est non dégénérée.

Cor : si q est non dégénérée, son indice vaut E(n/2)

b) Sur R

Déf : une forme quadratique est dite définie si son cône isotrope est trivial, positive si pour toux x, q(x)≥0, définie positive si pour tout x non nul, q(x)>0. Une fq dp est appelée produit scalaire, et (E,q) est appelé espace euclidien.

Th : les classes d'équivalences sont décrites par les matrices Ip,q,r=(I_p,-I_q,0_n-r). On appelle alors (p,q) la signature d'une fq.

Cor : il y a r+1 classes d'équivalences de fq de rang r (donc en tout 1+2+3+…+n+1=(n+1)(n+2)/2 classes d'équivalence.

Cor : il existe une base orthonormale ssi q est définie positive.

Cor : si q est non dégénérée, son indice est min(p,q) *(on peut mq que ds le cas général, la dimension d'un espace tot isotrope est plus petite que n/2 car dim*$A^{\perp}$*+dimA=n, et A est inclus dans* $A^{\perp}$*. (e_1,…,e_q,….,e_n) base adaptée à la décomposition def pos/def neg, E_+, E_-. Q est définie négative sur E_- donc l'intersection de E- avec tout espace tot isotrope est {0}. Donc la dimension max d'un esp isotrope est plus petite que n-max(p,q)=min(p,q)=p par ex. Regardons now H=Vect(e_i+e_s+i, i dans [1,p]} (possible car 2p<n). On vérifie que H est tot isotrope)*

Prop : calcul de la signature : q une fq non dégénérée. A une matrice représentative de q, P son poly caract. v (resp v') le nb de changements de signe dans P(x) (resp dans P(-x)). Alors sgn(q)=(v,v') [Mig 210]

c) Sur Fq

Th : sur Fq, les classes d'équivalences sont représentées par les matrices I_r et les matrices (I_r-1,a,0), où a n'est pas un carré dans Fq. Il y a donc 2n+1 classes d'équivalence *(attention le pas de récurrence est pas facile)*

Appl : loi de réciprocité quadratique [Caldero]

3) Réduction des formes quadratiques réelles

Th : (E,q) un espace euclidien. Tout endomorphisme autoadjoint est diagonalisable en base orthonormée [Gou 244]

Cor : S une matrice symétrique. Alors il existe P dans O(n,R) tq S=PDP^-1.

Th : (E,q) un espace euclidien (q dp), q' une fq qcq. Alors il existe une base de E qui est à la fois orthonormale pour q et orthonormée pour q' [Szp 78]

Cor : S symétrique. Il existe P tq tPP=Id et S=tPDP (csq du théorème spectral)

Appl : classification des coniques

III) Le groupe orthogonal

On considère des fq non dégénérées.

1) Générateurs

Déf : soit Q une forme quadratique, et O(Q)={u dans GL(E) tq q(u(x))=q(x)} l'ensemble des isométries. Si on note A la matrice représentative de Q dans une base, P est dans O(q) ssi tPAP=A, donc ssi P est dans le stabilisateur de A pour l'action de congruence. Or si Q est de signature O(p,q), A est dans l'orbite de Ip,q, donc O(Q) est conjugué à Stab(Ip,q) qu'on note O(p,q).

Prop : det=+-1

Déf : SO(q).

Exemple : groupe orthogonal de $q(x,y)=x^2-y^2$.

Déf : une symétrie orthogonale est un élément de GL(E) vérifiant $s^2=Id$ et appartenant à O(Q). Une réflexion orthogonale est une symétrie orthogonale fixant un hyperplan.

Th : (Cartan-Dieudonné) Tout élément de O(q) s'écrit comme produit d'au plus n réflexions orthogonales [Szp 316]

2) Topologie

Prop : On(R) est compact, On(C) ne l'est pas.

Prop : SOn(R) est connexe, O(p,q) a 4 composantes connexes

3) Th de Witt [Szp 94]

Th : th de Witt : E un K-ev de DF, b une fbs non dégénérée sur E. H et H' deux sous espaces de E et u une isométrie de H sur H'. Alors u peut être prolongée en une isométrie de E.

Corollaire : tous les SETIM ont même dimensions *(RpA : si dim H est lus petite que dimH', on injecte H dans H', et c'est une isométrie de H sur son image. Par le th on l'étend à E tout entier. U^-1(H') est un espace isotrope contenant H, par maximalité c'est H, de même dimension)*

4) Isomorphismes exceptionnels

SO_3(C) isomorphe à PSL_2(C) *(action de SL_2(C) sur sl_2(C) par conjugaison)*
SOo(2,1) isomorphe à PSL_2(R) *(action de SL_2(R) sur sl_2(R) par conjugaison)*
Soo(3,1) isomorphe à PSL_2(C) *(action deSL_2(C) sur H_2(C) par congruence hermitienne)*

Développements :
Théorème de Cartan Dieudonné [Szp 317] (***)
Loi de réciprocité quadratique via les fq [???] (**)
SO3(C) isomorphe à PSL_2(C) [???] (*ou **)
SO2(Fq) [FGN Alg1 17] (* ou **)
SETIM

Bibliographie :
[Szp]

Rapport du jury :
2009 : malheureusement la notion d'isotropie est mal maîtrisée par les candidats, y compris les meilleurs d'entre eux. Le cône isotrope est un aspect important de cette leçon, qu'il faut rattacher à la géométrie différentielle. L'algorithme de Gauss doit être énoncé et pouvoir être pratiqué sur une forme quadratique de R^3. Le lien avec la signature doit être clairement énoncé. Il est important d'illustrer cette leçon d'exemples naturels. Notons que le théorème de Chevalley-Warning ne constitue pas un bon développement dans les leçons sur les formes quadratiques, sa preuve délicate dans le cadre des polynômes homogènes, devient assez triviale en degré 2.
2008 : il faut savoir reconnaître une forme quadratique lorsqu'on dispose d'un polynôme homogène du second degré en plusieurs variables. La preuve de la loi d'inertie de Sylvester doit être connue.
Avant : il existe des formes quadratiques sur C, contrairement à ce que beaucoup de candidats affirment et il y a une différence entre formes quadratiques sur C et formes hermitiennes ! Il peut être utile de faire le lien, même de manière élémentaire, avec la géométrie (coniques, calcul de tangentes, polaires, étude locale des fonctions etc.). On peut réfléchir aux générateurs des groupes orthogonaux, au groupe SO(4), ou aux groupes SO(p, q).